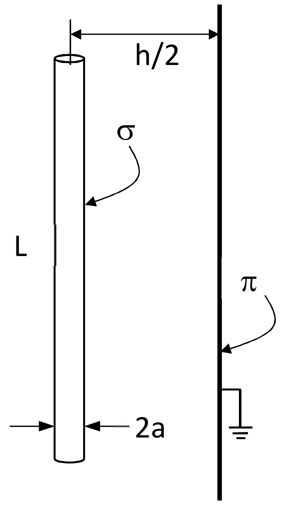
Esercizio n.1 **[10 punti]**



Si consideri un filo cilindrico conduttore di raggio ***a*** e lunghezza ***L>>a*** (quindi virtualmente infinito) caricato con una densità superficiale di carica costante ed uniforme σ.
A) Calcolare le espressioni del campo ***E*** e del potenziale elettrostatico ***V*** in funzione della distanza ***r*** dall'asse del filo, per ***r*** $\geq$ ***a***.
Si supponga ora di aggiungere al sistema un piano conduttore infinito π parallelo all'asse del filo, ad una distanza ***h/2 >> a*** dall'asse del filo, e collegato a massa [vedi figura].
B) Si calcoli il valore della capacità per unità di lunghezza del sistema filo + piano. Si trascurino eventuali effetti ai bordi.
Si consiglia di utilizzare il metodo delle cariche immagini.

Dati: a = 2,72 mm ; h = e^3 ***mm.***

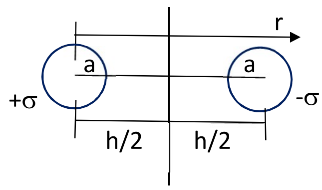
Soluzione

A) Utilizzando il teorema di Gauss per un cilindro alto l e a distanza r dal filo posso scrivere:

$$\phi(E; r, l) = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \quad \text{quindi: } E(r) \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{2\pi a \cdot l \cdot \sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{da cui: } E(r) = \frac{\sigma\, a}{\varepsilon_0\, r} \quad \therefore$$

$$V(r)_{+\sigma} = -\int_c^r \bar{E}(+\sigma) \cdot d\bar{r} = -\frac{\sigma\, a}{\varepsilon_0} \ln r + c \quad \therefore$$

B) La carica immagine corrisponde ad un filo carico identico al primo nelle dimensioni, con carica uguale e contraria, posto alla stessa distanza dal piano conduttore messo a massa.



I potenziali creati dai due fili, calcolati in un punto r fra i due fili [a≤r≤h-a] saranno:

$$V(r)_{+\sigma} = -\frac{\sigma\, a}{\varepsilon_0} \ln r + c_1 \;\; ; \;\; V(r)_{-\sigma} = \frac{\sigma\, a}{\varepsilon_0} \ln(h - r) + c_2 \;\; ; \;\; \text{da cui: } V(r) = V(r)_{+\sigma} + V(r)_{-\sigma} = \frac{\sigma\, a}{\varepsilon_0} \ln\frac{h-r}{r} + c_1 + c_2$$

Imponendo: V(r=h/2)=0 ho: $c_1 + c_2 = 0$, quindi: $V(r) = \frac{\sigma\, a}{\varepsilon_0} \ln\frac{h-r}{r}$, e in r=a avrò: $V(a) = \frac{\sigma\, a}{\varepsilon_0} \ln\frac{h-a}{a}$

Per avere C devo calcolare $\Delta V = V(a) - V(\pi) = V(a)$, essendo nullo il potenziale sul piano π.

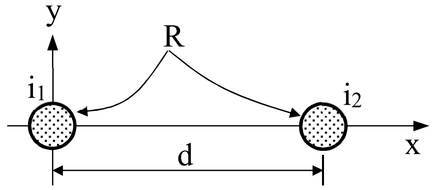
Quindi: $\frac{C}{l} = \frac{Q}{l}\frac{1}{\Delta V} = \frac{Q}{l}\frac{1}{V(a)} = \frac{\sigma \cdot 2\pi \cdot l}{l} \cdot \frac{\varepsilon_0}{\sigma\, a} \frac{1}{\ln(h-a/a)} \cong \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(h/a)}$ $\therefore$ avendo assunto h>>a

Il valore della capacità per unità di lunghezza sarà quindi: $\frac{C}{l} = \frac{2\,\pi\;9 \cdot 10^{-12}}{\ln(e^3/e)} = \frac{2\,\pi\;9 \cdot 10^{-12}}{2} \cong 27\ \mathrm{pF/m}$ $\therefore$

Nota: il fatto che il piano π sia a massa non vuol dire che non sia carico: avrà una carica negativa totale (non uniforme!) uguale e contraria a quella del filo. Quindi il potenziale della superficie del filo (r=a) sarà la somma dei contributi della carica del filo + la carica del piano (o quella del filo immagine). Trascurando questo contributo il risultato è concettualmente errato, anche se, per puro caso algebrico, il risultato possa venire molto simile a quello giusto.

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Consideriamo due fili di rame paralleli, di raggio ***R***, posti nel vuoto, con gli assi distanti ***d*** e percorsi dalla stessa corrente ***$i_1 = i_2 = i$*** in direzione dell'asse z [vedi figura] e con lo stesso verso. Assumendo l'asse x come indicato in figura si calcolino le espressioni dei campi di induzione magnetica ***B*** nelle seguenti zone dell'asse x (y=z=0):



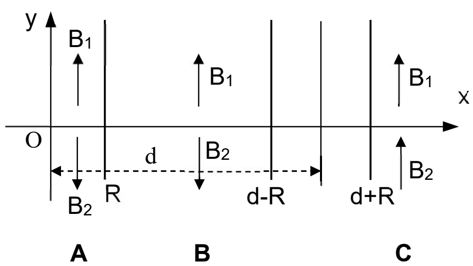
A) Per ***$0 \leq x \leq R$***. B) Nella zona compresa fra i due fili. C) Per ***$x \geq (d + R)$.***

D) Si calcoli inoltre il valore del campo ***B*** nei due punti ***$x = 0$*** e **$x = d/2$**.

Dati : d = 4 cm ; i = 2 A

Soluzione

Il campo $\overline{B}$ nel vuoto da un filo infinito, percorso da una corrente i, a distanza r dal filo è $\overline{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\,\hat{\tau}$ in cui la direzione del campo è tangenziale alla circonferenza di raggio r, con verso antiorario se la corrente è diretta verso l'alto. I versi dei campi creati dai due fili, lungo l'asse x, sono quelli indicati nella figura a lato.



Le componenti dei campi in direzione y saranno:

A) 0≤x≤R

$$\oint B_1(x)\,dl = \mu_0\, i(\text{interna}) \rightarrow \; B_1(x)\cdot 2\pi x = \mu_0 \cdot J(x)\cdot \pi x^2 = \mu_0 \frac{i}{\pi R^2}\cdot \pi\, x^2 \quad \text{quindi:} \quad B_1(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot i\frac{x}{R^2} \quad \therefore$$

$$B_2(x) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{d-x} \quad \text{da cui:} \quad B_A(x) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi}\cdot\left(\frac{x}{R^2} - \frac{1}{d-x}\right) \quad \therefore$$

B) R≤x≤d-x

$$B_1(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x} \quad ; \quad B_2(x) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{d-x} \qquad \text{da cui:} \quad B_B(x) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x}\right) \quad \therefore$$

C) x≥d+R

$$B_1(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x} \quad ; \quad B_2(x) = -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{x-d} \qquad \text{da cui:} \quad B_C(x) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-d}\right) \quad \therefore$$

§ Forma compatta: tenendo conto che la grandezza (x-d) è automaticamente <0 o >0 a seconda che x sia <d o >d le formule di cui sopra si possono scrivere così in forma compatta:

$$B_A(x) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi}\cdot\left(\frac{x}{R^2} - \frac{1}{d-x}\right) \quad ; \quad B_B(x) = B_C(x) = \frac{\mu_0\, i}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-d}\right)$$

D) I valori numeri richiesti sono:

Nel punto x=0: $B_A(0)_{\hat{y}} = \frac{\mu_0\, i}{2\pi}\cdot\left(-\frac{1}{d}\right) = -\frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 2}{2\pi\cdot 4\cdot 10^{-2}} = -10^{-5}\ \text{T} = -10\ \mu\text{T} \quad \therefore$

Nel punto x=d/2: $B_B(d/2) = 0$ per simmetria $\therefore$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

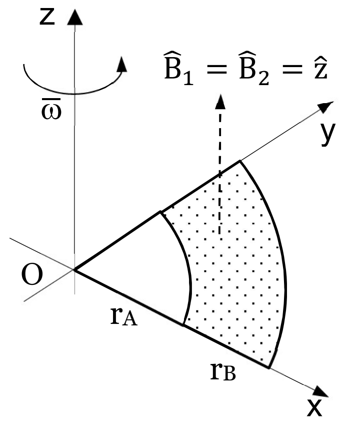
Nel piano xy è posto un circuito rigido equivalente ad ¼ di una corona circolare di raggi interno ed esterno rispettivamente r_A ed r_B (vedi figura, zona a puntini). Il circuito ruota, mantenendosi nel piano xy, intorno all'asse z, con velocità angolare costante $\overline{\omega} = \omega\hat{z}$. Nello spazio è presente un campo B, diretto secondo l'asse z, in due configurazioni diverse, B_1 e B_2:

1) Il modulo di B_1 ha il valore, fra r_A e r_B, uguale a $\overline{B}_1(r) = \frac{r_A}{r}\ B_0\ \hat{z}$.

2) Il campo B_2 è uniforme, con espressione $\overline{B}_2(t) = \frac{t}{t_0}\ B_0\ \hat{z}$.

Si chiede: A) Determinare se nel circuito si crea una f.e.m. indotta diversa da zero: solo nel caso 1) , solo nel caso 2), in tutti e due i casi o in nessun caso (giustificare opportunamente le risposte).

B) Calcolare il valore della f.e.m. indotta nel caso(nei casi) in cui sia diversa da zero.



Dati : r_A = 10 cm ; r_B = 2 r_A ; ω = 2 rad/s ; B_0 = 4 T ; t_0 = 3 ms.

Soluzione

A)

1) $\overline{B}_1(r) = \frac{r_A}{r}\ B_0\ \hat{z}$, quindi per calcolare $\phi_1(B_1)$ è necessario integrare il flusso elementare su di una sottile corona circolare di raggio r e spessore dr: $d\phi_1(r) = dr \cdot \frac{2\pi r}{4} \cdot B(r) = dr \frac{\pi}{2} r \frac{r_A}{r} B_0 = \frac{\pi r_A B_0}{2} dr$ che integrata dà:

$\phi_1(B_1) = \int_{r_A}^{r_B} d\phi_1 = \frac{\pi r_A B_0}{2}(r_B - r_A)$ da cui: $\text{f.e.m.}(1) = -\frac{d\phi_1}{dt} = 0\ \therefore$

Si poteva anche osservare che il flusso di B_1, avendolo scritto correttamente, dipende solo da grandezze costanti, quindi è indipendente dal tempo, quindi la f.e.m. = $d\phi/dt$ = 0.

2) $\overline{B}_2(t) = \frac{t}{t_0}\ B_0\ \hat{z}$ quindi: $\phi_2 = B_0 \frac{t}{t_0} \frac{\pi}{4}({r_B}^2 - {r_A}^2)$

$\text{f.e.m.}(2) = -\frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{B_0 \pi}{4\ t_0}({r_B}^2 - {r_A}^2) = -\frac{B_0 \pi}{4\ t_0} \cdot 3\ {r_A}^2\ \therefore$

B)

$\text{f.e.m.}(2) = -\frac{4 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = -\pi \cdot 10\ \text{V} \cong -31{,}4\ \text{V}\ \therefore$

Nota: Tutti i calcoli possono essere fatti con l'approssimazione del 10%, compresi i valori delle costanti fondamentali.